Θέμα Α

Α1 – γ , Α2 – γ , Α3 – β , Α4 – δ , Α5 α – Λ, β – Λ , γ – Σ , δ – Λ , ε – Σ

Θέμα Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

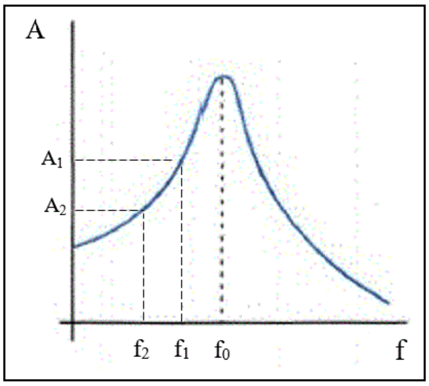
Τη χρονική στιγμή $t_1 = N_1 T$: $A_1 = \frac{A_0}{4} \Rightarrow A_0 e^{-\Lambda t_1} = \frac{A_0}{4} \Rightarrow \Lambda t_1 = \ln 4 \Rightarrow N_1 T \Lambda = \ln 4 \Rightarrow \Lambda = \frac{\ln 4}{N_1 T}$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = N_2 T = (N_1 + 2N)T = 3N_1 T : A_2 = A_0 e^{-\Lambda t_2} = A_0 e^{-\ln 4^3} = \frac{A_0}{4^3} = \frac{A_0}{64}$

όπου $\Lambda t_2 = \frac{\ln 4}{N_1 T} 3N_1 T = 3 \cdot \ln 4 = \ln 4^3$

Άρα $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} D A_1^2}{\frac{1}{2} D A_2^2} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \left(\frac{A_0/4}{A_0/64}\right)^2 = 16^2 = 256 \Rightarrow \boxed{E_1 = 256 E_2}$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (β).



Για την ιδιοσυχνότητα του συστήματος ισχύει: $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

Για δύο τιμές της συχνότητας του διεγέρτη ισχύει: $f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

και $f_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Συγκρίνοντας της συχνότητες έχουμε $f_0 > f_1 > f_2$ άρα $A_1 > A_2$ όπως φαίνεται και από το διάγραμμα του πλάτους της εξαναγκασμένης ταλάντωσης σε συνάρτηση με τη συχνότητα του διεγέρτη.

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Οι εξισώσεις των τριών ταλαντώσεων είναι:

$x_1 = A \cdot \eta\mu(\omega t)$, $x_2 = 2A \cdot \eta\mu(\omega t + \pi)$ και $x_3 = A\sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

Σύνθεση των x_1, x_2 : $\Delta\varphi_{1,2} = \pi\, rad \to A_{1,2} = |A_1 - A_2| = |A - 2A| \Rightarrow A_{1,2} = A$

Επειδή $A_1 < A_2 \to \varphi_{0(1,2)} = \pi\, rad$. Άρα $x_{1,2} = A_{1,2} \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_{0(1,2)}) \Rightarrow x_{1,2} = A \cdot \eta\mu(\omega t + \pi)$

Σύνθεση των $x_{1,2}, x_3$: $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} rad \to A_{o\lambda} = \sqrt{A_{1,2}^2 + A_3^2} = \sqrt{A^2 + (A\sqrt{3})^2} \Rightarrow A_{o\lambda} = 2A$

και $\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_{1,2}}{A_3} = \frac{A}{A\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \to \theta = \frac{\pi}{6} rad$, οπότε $\varphi_0 = \theta + \varphi_{03} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} rad$

Άρα $x_{o\lambda} = A_{o\lambda} \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \boxed{x_{o\lambda} = 2A \cdot \eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)}$

Β4. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Ισχύει $A_{o\lambda} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \sigma\upsilon\nu\Delta\varphi} \Rightarrow A_{o\lambda}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \sigma\upsilon\nu\Delta\varphi$, όπου $A_1 = A$ και $A_2 = 2A$

$A_{o\lambda}^2 = A^2 + 4A^2 + 2A \cdot 2A\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi \Rightarrow A_{o\lambda}^2 = 5A^2 + 4A^2 \sigma\upsilon\nu\Delta\varphi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\Delta\varphi = \frac{A_{o\lambda}^2 - 5A^2}{4A^2}$

όμως $-1 \le \sigma\upsilon\nu\Delta\varphi \le +1 \Rightarrow -1 \le \frac{A_{o\lambda}^2 - 5A^2}{4A^2} \le +1 \Rightarrow -4A^2 \le A_{o\lambda}^2 - 5A^2 \le +4A^2 \Rightarrow$

$-4A^2 + 5A^2 \le A_{o\lambda}^2 \le 4A^2 + 5A^2 \Rightarrow A^2 \le A_{o\lambda}^2 \le 9A^2 \Rightarrow \boxed{A \le A_{o\lambda} \le 3A}$

Θέμα Γ

Γ1. Από τις εξισώσεις προκύπτει ότι $A_1 = A_2 = A = 0,2m$, $\varphi_{01} = 0$ και $\omega = 10\dfrac{rad}{s}$.

Η σύνθετη ταλάντωση έχει μέγιστο μέτρο ταχύτητας $\upsilon_{\max} = 2\sqrt{3}\dfrac{m}{s}$ οπότε

$$\to \upsilon_{\max} = \omega A_{o\lambda} \Rightarrow A_{o\lambda} = \frac{\upsilon_{\max}}{\omega} \Rightarrow A_{o\lambda} = 0,2\sqrt{3}m = A\sqrt{3}.$$

Ισχύει $A_{o\lambda} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi} \Rightarrow A_{o\lambda}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi \Rightarrow$

$3A^2 = A^2 + A^2 + 2A^2\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\Delta\varphi = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ όμως $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \varphi_{02} - 0 \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_{02}$

$\sigma\upsilon\nu\varphi_{02} = \dfrac{1}{2}$, με $0 < \varphi_{02} < \pi\,rad$ άρα $\boxed{\varphi_{02} = \dfrac{\pi}{3}rad}$

Γ2. Η εξίσωση της σύνθετης ταλάντωσης είναι: $x_{o\lambda} = A_{o\lambda}\cdot\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$, όπου $A_{o\lambda} = 0,2\sqrt{3}m$ και

$$\varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi\varphi_0 = \frac{A_2\eta\mu\varphi_{02}}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\varphi_{02}} = \frac{0,2\cdot\eta\mu\frac{\pi}{3}}{0,2 + 0,2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \to \varphi_0 = \frac{\pi}{6}rad$$

άρα $\boxed{x_{o\lambda} = 0,2\sqrt{3}\cdot\eta\mu\left(10t + \dfrac{\pi}{6}\right)\ S.I.}$

Γ3. Όταν οι επιμέρους ταλαντώσεις έχουν αντίθετες απομακρύνσεις ισχύει:

$$x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_{o\lambda} = 0 \Rightarrow 0,2\sqrt{3}\cdot\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu 0 \to$$

$$\left.\begin{cases} 10t + \dfrac{\pi}{6} = 2\kappa\pi \Rightarrow t = \dfrac{12\kappa - \pi}{60}\ (1) \\ 10t + \dfrac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \pi \Rightarrow t = \dfrac{12\kappa + 5\pi}{60}\ (2) \end{cases}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \kappa = 0 \to t = -\dfrac{\pi}{60}s,\ \kappa = 1 \to t = \dfrac{11\pi}{60}s \\ \kappa = 0 \to \boxed{t = \dfrac{5\pi}{60}s = \dfrac{\pi}{12}s}\ 1^{\eta}\ \text{φορά} \end{array}\right\}$$

Γ4. Ο ρυθμός μείωσης της ενέργειας του συστήματος υπολογίζεται:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dW_{F'}}{dt} = -\frac{|F'|\cdot dx}{dt} = -|F'|\cdot\upsilon = -b\cdot\upsilon\cdot\upsilon = -b\cdot\upsilon^2 \Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = -b\cdot\upsilon^2 = -0,8\frac{J}{s}}$$

Γ5. Το ποσοστό μείωσης του πλάτους ανά περίοδο είναι:

$$\pi = \frac{A_\kappa - A_{\kappa+1}}{A_\kappa}100\% = \left(1 - \frac{A_{\kappa+1}}{A_\kappa}\right)100\% = \left(1 - \frac{A_0e^{-(\kappa+1)\Lambda T}}{A_0e^{-\kappa\Lambda T}}\right)100\% = \left(1 - \frac{e^{-\kappa\Lambda T}e^{-\Lambda T}}{e^{-\kappa\Lambda T}}\right)100\% \Rightarrow$$

$$\pi = \left(1 - e^{-\Lambda T}\right)100\% \Rightarrow 20\% = \left(1 - e^{-\Lambda T}\right)100\% \Rightarrow 0,2 = 1 - e^{-\Lambda T} \Rightarrow e^{-\Lambda T} = 0,8 \Rightarrow \frac{1}{e^{\Lambda T}} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$e^{\Lambda T} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \Lambda T = \ln\dfrac{5}{4}$ όπου $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{\pi}{5}s$,

$$\Lambda\frac{\pi}{5} = \ln\frac{5}{4} \Rightarrow \Lambda = \frac{5}{\pi}\cdot\ln\frac{5}{4}s^{-1} \Rightarrow \Lambda = \frac{5}{\pi}\cdot 0,22s^{-1} \Rightarrow \boxed{\Lambda = \frac{1,1}{\pi}s^{-1}}$$

Θέμα Δ

Δ1. Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου όταν έχει διαγράψει $N=\frac{6}{\pi}$ στροφές δηλαδή $\theta = 2\pi N = 12\,rad$ θα υπολογιστεί από το Θεώρημα Έργου Ενέργειας:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{\tau_F} \Rightarrow \frac{1}{2}I_\delta \omega^2 - 0 = \tau_F \cdot \theta \Rightarrow \frac{1}{2}I_\delta\omega^2 = F\cdot R\cdot\theta \Rightarrow \boxed{\omega = 10\frac{rad}{s}}$$

Δ2. α) Ο ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας του δίσκου τη στιγμή που έχει διαγράψει $N=\frac{6}{\pi}$ στροφές (στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής) υπολογιστεί από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt} = \frac{\Sigma\tau\cdot d\theta}{dt} = \Sigma\tau\cdot\omega = FR\omega \Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dt} = 20\frac{J}{s}}$$

β) Όταν ο τροχός έχει διαγράψει γωνία $\theta = 2\pi N = 12\,rad$ έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10\frac{rad}{s}$. Η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού θα υπολογιστεί από τις εξισώσεις κίνησης:

$$\left.\begin{cases}\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2 \\ \omega = \alpha_{\gamma\omega\nu}t \Rightarrow t = \frac{\omega}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}\end{cases}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\omega^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega^2}{2\theta} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{25}{6}\frac{rad}{s^2}$$

Γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10\frac{rad}{s}$ αποκτά τη στιγμή $t = \frac{\omega}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} = 2{,}4\,s$.

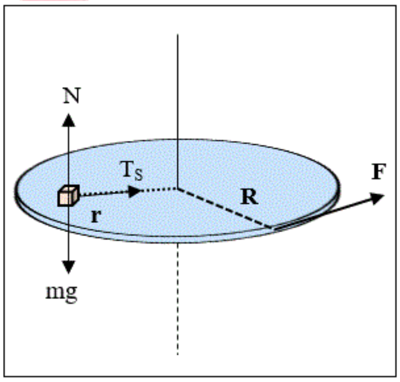
Η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ στη χρονική διάρκεια των $N=\frac{6}{\pi}$ στροφών (μέση ισχύς) υπολογιστεί από τον τύπο: $P_F = P_{\tau_F} = \frac{W_F}{\Delta t} = \frac{W_{\tau_F}}{\Delta t} = \frac{\tau_F\cdot\theta}{t-0} = \frac{F\,R\cdot\theta}{t} = \frac{4\cdot 0{,}5\cdot 12}{2{,}4}\frac{J}{s} \Rightarrow \boxed{P_F = P_{\tau_F} = 10W}$.

Δ3. Η οριακή τιμή της στατικής τριβής μέχρι πριν αρχίσει να ολισθαίνει το σώμα Σ είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg \rightarrow T_{S\max} = \mu_S N = \mu_S mg = 16N$$

Το σώμα Σ εκτελεί κυκλική κίνηση. Η στατική τριβή T_S είναι η κεντρομόλος δύναμη και ισχύει:

$$\Sigma F_{(r)} = m\alpha_\kappa \Rightarrow T_S = m\frac{\upsilon^2_{\gamma\rho(r)}}{r} = m\frac{r^2\omega^2}{r} \Rightarrow T_S = m r\omega^2.$$



Στην οριακή περίπτωση μέχρι πριν αρχίσει η ολίσθηση έχουμε:

$$T_S \le T_{S\max} \Rightarrow m r\omega^2 \le T_{S\max} \Rightarrow \omega^2 \le \frac{T_{S\max}}{m r} \Rightarrow \omega^2 \le 20\left(\frac{rad}{s}\right)^2 \rightarrow \text{οριακά } \omega = \sqrt{20}\frac{rad}{s}$$

Από το Θεώρημα Έργου Ενέργειας έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{\tau_F} \Rightarrow \frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega^2 - 0 = W_{\tau_F} \Rightarrow W_{\tau_F} = \frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega^2 \text{ όπου } I_{o\lambda} = I_\delta + I_\Sigma = I_\delta + m r^2 = 0{,}8\,Kg\cdot m^2$$

$$W_{\tau_F} = \frac{1}{2}0{,}8\cdot 20\,J \Rightarrow \boxed{W_{\tau_F} = 8\,J}$$

Δ4. Η μεταβλητή δύναμη $F' = 0{,}08\cdot\theta$ $S.I.$ προκαλεί μεταβλητή ροπή

$$\tau_{F'} = F'R = 0{,}08\cdot\theta\cdot 0{,}5 \Rightarrow \tau_{F'} = 0{,}04\cdot\theta \; S.I.$$

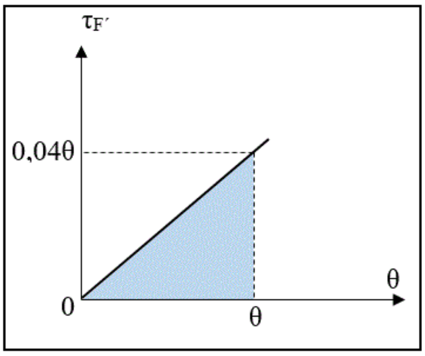
α) Ο ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος δίσκος – σώμα Σ, ως προς τον άξονα περιστροφής του δίσκου, είναι: $\frac{dL_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt} = \Sigma\tau' = \tau_{F'} = 0{,}04\cdot\theta = 0{,}04\cdot 10\,N\,m \Rightarrow \boxed{\frac{dL_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt} = 0{,}4\,N\cdot m}$

β) Η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος δίσκος – σώμα Σ τη στιγμή έχει διαγράψει γωνία $\theta = 10\,rad$ είναι: $\Sigma\tau' = I_{o\lambda}\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{\Sigma\tau'}{I_{o\lambda}} = \dfrac{\tau_{F'}}{I_{o\lambda}} = \dfrac{0,04\cdot 10}{0,8}\dfrac{rad}{s^2} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 0,5\dfrac{rad}{s^2}$

Ο ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του σώματος Σ είναι:

$$\frac{dL_{(\Sigma)}}{dt} = \Sigma\tau_{(\Sigma)} = I_{\Sigma}\alpha_{\gamma\omega\nu} = m r^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \boxed{\frac{dL_{(\Sigma)}}{dt} = 0,16\,N\cdot m}$$

Δ5. Τη στιγμή που το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει πάνω στον δίσκο η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος είναι $\omega = \sqrt{20}\,\dfrac{rad}{s}$ οπότε η κινητική του ενέργεια είναι $K = \dfrac{1}{2}I_{o\lambda}\omega^2 = 8J$. Ο αριθμός των στροφών που έχει εκτελέσει το σύστημα δίσκος – σώμα Σ μέχρι τότε θα υπολογιστεί από τη γωνία θ η οποία θα βρεθεί από το Θεώρημα Έργου Ενέργειας:



$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Rightarrow K - 0 = W_{\tau_{F'}} \Rightarrow W_{\tau_{F'}} = 8J \Rightarrow +\text{Εμβαδόν} = 8J \Rightarrow$

$\dfrac{1}{2}0,04\theta\cdot\theta = 8J \Rightarrow \theta^2 = 400 \Rightarrow \theta = 20\,rad$ Άρα $N = \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{20}{2\pi} \Rightarrow \boxed{N = \dfrac{10}{\pi}\text{στροφές}}$